Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Cinquième séance d'exercices –

vecteurs de Killing et métrique de Schwarzschild

« *Aide-mémoire* »

Vecteurs de Killing

Une **isométrie** est une symétrie qui laisse invariante la métrique d'une variété (et donc sa géométrie). Si, infinitésimalement, une isométrie peut-être représentée par la transformation [1]

$$x^\mu \to x^\mu + \varepsilon\xi^\mu + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \qquad (|\varepsilon| \ll 1),$$

alors on appelle ξ^μ un **champ de vecteurs de Killing**. Il satisfait à l'**équation de Killing**

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv g_{\alpha\mu}\partial_\nu\xi^\alpha + g_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha + \xi^\alpha\partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0.$$

Cette équation peut se réécrire sous la forme équivalente

$$\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0.$$

Les vecteurs de Killing encodent donc les isométries d'une variété.

Métrique de Schwarzschild

La **métrique de Schwarzschild** est l'unique solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide qui soit asymptotiquement minkowskienne. Elle représente le champ de gravitation d'une masse à symétrie sphérique. L'existence d'une telle symétrie est reflétée par le fait qu'il existe des coordonnées r, θ, ϕ, t (avec θ, ϕ des coordonnées angulaires sur la 2-sphère) telles que la métrique soit invariante pour la transformation

$$t' = t; \qquad r' = r; \qquad \theta' = R^\theta(\theta, \phi); \qquad \phi' = R^\phi(\theta, \phi)$$

où R^θ, R^ϕ correspondent à une rotation sur la sphère.

Pour dériver la solution de Schwarzschild, on montre d'abord que l'existence de la symétrie sphérique permet de simplifier l'élément de longueur et le mettre sous la forme

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{\nu(t,r)}\mathrm{d}t^2 + e^{\mu(t,r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

où $\nu(t, r)$ et $\mu(t, r)$ sont des fonctions arbitraires de r et t et $\mathrm{d}\Omega \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$ la métrique de la 2-sphère de rayon unité en coordonnées sphériques. Le **théorème de Birkhoff** nous dit

1. On peut toujours interpréter un difféomorphisme sur une variété comme un changement de coordonnées « actif » sur ladite variété. Voir par exemple Carroll, annexes A et B.

ensuite que toute solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide est nécessairement statique : en intégrant les équations d'Einstein, on trouve que cette solution est nécessairement donnée par la famille à un paramètre de solutions

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{\nu(r)}\mathrm{d}t^2 + e^{-\nu(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

avec $e^{\nu(r)} \equiv 1 - 2M/r$. On interprète M comme la *masse* de la solution. Notons finalement que les seuls symboles de Christoffel non-nuls de la métrique de Schwarzschild sont

$$\begin{array}{lll} \Gamma^t_{tr} = \dfrac{\nu'}{2}, & \Gamma^r_{tt} = \dfrac{1}{2}e^{2\nu}\nu', & \Gamma^r_{rr} = -\dfrac{1}{2}\nu', \\ \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{\nu}, & \Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{\nu}\sin^2\theta, & \Gamma^\theta_{r\theta} = \dfrac{1}{r}, \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma^\phi_{r\phi} = \dfrac{1}{r}, & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta. \end{array}$$

.